Wrocławski Konkurs Matematyczny dla uczniów klas I-III gimnazjów

ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE

Zadanie 1.

O godzinie 9^{00} wskazówki zegara – duża i mała – są do siebie prostopadłe. Po jakim najkrótszym czasie wskazówki zegara znów utworzą kąt prosty.
Ile razy w ciągu doby wskazówki zegara są do siebie prostopadłe?

Zadanie 2.

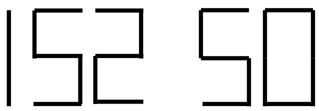
Zegar wskazuje godzinę 6.00. Po ilu minutach wskazówka minutowa dogoni wskazówkę godzinową?

Zadanie 3.

Dwa zegarki wskazują tę samą godzinę w niedzielę w południe. Jeden spieszy się o 5 minut na dobę, a drugi spóźnia się o 10 minut na dobę. Po ilu dniach wskazówki obu zegarków znajdą się w ty samym położeniu?

Zadanie 4

Tomek czekał w ekskluzywnym banku na swoją kolejkę. Każdy klient miał swój numerek. Elektroniczny wyświetlacz zawiadamiał o numerze stanowiska obsługującego danego klienta. (np. 12 143 oznaczało wezwanie klienta z numerkiem 143 do okienka nr 12). Tomek siedział tyłem do wyświetlacza, ale widział go w lustrze. Lustro zawieszone było wysoko, więc Tomek dla wygody obserwował jego odbicie na marmurowej posadzce (dodatkowo odwracało to obraz „do góry nogami"). Tomek podszedł do okienka, gdy na posadzce ujrzał napis:



Jaki był numer stanowiska i który numerek miał Tomek?

Zadanie 5

Na zegarze pół do dziesiątej bić zaczyna. W rzeczywistości zaś, począwszy od dwunastej, przez połowę czasu wskazówki na tym zegarze przesuwały się dwa razy szybciej niż powinny, a przez drugą połowę dwa razy wolniej. Którą godzinę powinien pokazywać zegar?

Zadanie 6

Cena biletu na mecz wynosiła 30 zł. Gdy cenę obniżono okazało się, ze na mecz przychodzi o 50% widzów więcej a dochód uzyskany ze sprzedaży biletów na jeden mecz wzrósł o 25%. O ile obniżono cenę biletu?

Zadanie 7

Po meczu część kibiców odjechała sześcioma autobusami (w każdym autobusie było tyle samo osób). Pozostali, a było ich o 15% więcej niż tych, co odjechali, poszli pieszo. Ilu było kibiców, jeżeli wiemy, że na meczu było nie więcej niż 400 osób a autobusami odjechało więcej niż 150 osób.

Zadanie 8

W fabryce wyprodukowano w ciągu 30 dni 600 piłek realizując 30% zamówienia. O ile procent należy zwiększyć dzienną produkcję, aby w ciągu następnych 56 zakończyć realizację zamówienia

Zadanie 9

Antykwariat kupił dwa przedmioty za 2250 zł, a na ich sprzedaży zyskał 40% tej kwoty. Za ile złotych kupiono każdy przedmiot, jeżeli pierwszy dał 25% zysku a drugi 50% zysku.

Zadanie 10

W rombie jedną przekątną skrócono o p% a drugą wydłużono o p% tak, że w rezultacie pole rombu zmniejszyło się o 4%. Oblicz wartość p.

Zadanie 11

W trójkącie długości boków są liczbami naturalnymi. Dwa boki mają długość 8 i 20.
Jaki jest możliwy największy, a jaki najmniejszy obwód tego trójkąta?

Zadanie 12

Dany jest romb o boku 8. Z wierzchołka kąta rozwartego poprowadzono przekątną oraz dwie wysokości. Narysowane odcinki podzieliły ten kąt na 4 równe części. Oblicz pole rombu.

Zadanie 13

Suma długości boków AC i BC trójkąta ABC wynosi 20 cm. Miary kątów A i B są równe odpowiednio 30^0i 45^0. Oblicz długości boków AC i BC.

Zadanie 14

Drut o długości 20 cm rozcięto na dwie części w stosunku 2:3. Z krótszej części utworzono brzeg kwadratu, z dłuższej okrąg. Oblicz stosunek pola kwadratu do pola koła ograniczonego tym okręgiem.

Zadanie 15

Krótsze ramię szlabanu kolejowego ma długość 0,75 m, a dłuższe 3,75 cm. Jak wysoko podnosi się koniec dłuższego ramienia, gdy koniec krótszego opuszcza się o 0,5 m?

Zadanie 16

Długości boków trójkąta wynoszą 10 cm, 10 cm, 12 cm. Oblicz odległość środka okręgu wpisanego w ten trójkąt od każdego wierzchołka trójkąta.

Zadanie 17

W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości: 15 cm i 20 cm. Na krótszej przyprostokątnej jako na średnicy zbudowano okrąg. Oblicz długości odcinków, na jakie ten okrąg podzielił przeciwprostokątną.

Zadanie 18

Środki kolejnych boków trapezu równoramiennego połączono odcinkami. Udowodnij, że suma pól powstałych czterech trójkątów jest równa polu powstałego czworokąta.

Zadanie 19

Dwie cięciwy przecinają się wewnątrz koła tak, że odcinki jednej z nich mają długości 8 cm i 6 cm, a odcinki drugiej pozostają w stosunku 1 : 3. Oblicz długość drugiej cięciwy.

Zadanie 20

W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość 12 cm i 16 cm. Oblicz średnicę okręgu przechodzącą przez środek krótszej przyprostokątnej i stycznego do przeciwprostokątnej w jej środku.

Zadanie 21

Stosunek długości podstaw trapezu wynosi 5 : 2, a ich różnica jest równa 18. Oblicz długość odcinka łączącego środki nierównoległych boków tego trapezu.

Zadanie 22

Cięciwy AB i CD okręgu o promieniu 10 cm są równoległe i środek O okręgu nie leży między nimi. Miara kąta środkowego AOB wynosi 120^0, a miara kąta środkowego COD wynosi 60^0. Oblicz pole trapezu ABCD.

Zadanie 23

Dla jakich liczb a i b liczba 35a42b jest podzielna przez 45?

Zadanie 24

Pewna liczba podzielna jest przez 91 i 21. Czy wynika stąd, że jest również podzielna przez 21x91=1911?

Zadanie 25

Sumę kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych podzielono przez 3. Jaką otrzymano resztę?

Zadanie 26

Udowodnij, że dla każdej liczby nieparzystej n, liczba postaci n^3-n^2-n+1 jest podzielna przez 16.

Zadanie 27

Znaleźć wszystkie liczby całkowite k, dla których $\dfrac{k^2+1}{k+1}$ jest liczbą całkowitą.

Zadanie 28

Znaleźć 4 najmniejsze liczby naturalne, których suma podzielna jest przez 15.

Zadanie 29

Czy liczba $3^{11} + 3^{10} + 3^9$ dzieli się przez 13?

Zadanie 30

Udowodnij, że wszystkie liczby postaci $1995+5^n+5^{n+1}$, gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą nieujemną dzielą się przez 3.

Zadanie 31

Uzasadnij, że liczba $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1989 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 1990$ jest podzielna przez 1991.

Zadanie 32

Dane są dwie liczby czterocyfrowe, z których jedna powstaje drugiej przez zapisanie cyfr w odwrotnym porządku. Wyznacz resztę dzielenia sumy tych liczb przez 11.

Zadanie 33

Suma dwóch liczb naturalnych wynosi 64. Przy dzieleniu większej przez mniejszą otrzymujemy 3 i resztę 4. Znajdź te liczby.

Zadanie 34

Ile jest liczb dwucyfrowych podzielnych przez iloczyn swoich cyfr?

Zadanie 35

Pan Kowalski powiedział, że gdy sumę lat trojga jego dzieci pomnoży przez jego wiek, to otrzymamy 128. Wiek każdego dziecka jest liczbą całkowitą oraz wiek ojca jest liczbą całkowitą o sumie cyfr równej 5. Oblicz wiek pana Kowalskiego i jego dzieci.

Zadanie 36

Jeżeli między cyfry liczby dwucyfrowej wstawimy 5 jako cyfrę setek i 1 jako cyfrę dziesiątek, to otrzymamy liczbę czterocyfrową podzielną przez 7. Jeżeli podobnie wstawimy cyfry 1 i 5, to otrzymamy liczbę, która przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2. Znaleźć wszystkie takie liczby dwucyfrowe.

Zadanie 37

Wyznaczyć wszystkie pary (p, q) liczb pierwszych takich, że pq + 1 i pq –1 też są liczbami pierwszymi.

Zadanie 38

Wykaż, że wśród pięciu liczb całkowitych są trzy takie, których suma dzieli się przez 3.

Zadanie 39

Trzej bracia otrzymali razem 24 jabłka, przy czym każdy otrzymał ich tyle ile ma lat. Najmłodszy, bardzo sprytny zaproponował braciom taką wymianę. Ja - powiedział zostawię sobie tylko połowę swoich jabłek, a pozostałe podzielę między was na równe części, następnie niech nasz brat średni także zostawi sobie połowę a pozostałe da mnie i najstarszemu bratu w równych ilościach, wreszcie niech najstarszy również postąpi tak samo.
Bracia zgodzili się i w rezultacie każdy z nich miał jednakową ilość jabłek. Po ile lat mieli bracia?

Zadanie 40

Podziel 45 na 4 części tak, aby po dodaniu do pierwszej z nich 2, po odjęciu od drugiej 2, po pomnożeniu trzeciej przez 2 i podzieleniu czwartej przez dwa otrzymali równe wyniki.

Zadanie 41

Jeśli do pewnej liczby pięciocyfrowej dopiszemy 1 z lewej strony, to otrzymamy liczbę sześciocyfrową trzykrotnie mniejszą od liczby powstałej przez dopisanie 1 z prawej strony tej samej liczby pięciocyfrowej. Jaka to liczba?

Zadanie 42

W kongresie uczestniczyło 1000 osób: w tym 900 znało język angielski, 750 francuski, 700 rosyjski, 651 niemiecki. Wykaż, że przynajmniej jeden uczestnik kongresu władał wszystkimi czterema wymienionymi językami.

Zadanie 43

W kongresie uczestniczyło 100 osób, 85 znało język angielski, 80 francuski, 70 niemiecki, 66 rosyjski. Czy wśród uczestników kongresu był taki, który władał wszystkimi czterema językami?

Zadanie 44

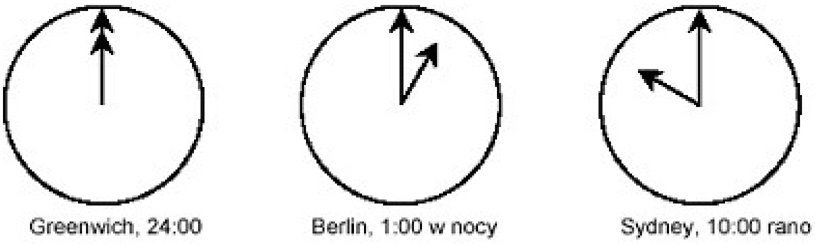
Pole prostokąta wynosi 6 cm^2. Wyznacz długość jednego z boków prostokąta jako funkcję długości drugiego boku i narysuj jej wykres.

Zadanie 45

W jednym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy funkcji:
$f(x)= -|x-2|+2$
$g(x)=0,5x+1$
Na podstawie wykresów podaj, dla jakich wartości x wartości funkcji g są większe od wartości funkcji f.

Etap I – szkolny
Czas pracy: 120 minut

Zadanie 1
Mark (z Sydney w Australii) i Hans (z Berlina w Niemczech) często porozumiewają się ze sobą przez Internet, za pomocą, tzw. „czatu”. Żeby móc tak rozmawiać, muszą wchodzić do Internetu w tym samym momencie.
Chcąc znaleźć odpowiednią porę na taką rozmowę, Mark szukał diagramów pokazujących czas w różnych miastach świata. Oto, co znalazł:



Mark i Hans nie mogą „rozmawiać” w godzinach 9:00 – 16:30 czasu lokalnego, ponieważ są wtedy w szkole. Nie mogą też łączyć się między 23:00 a 7:00 rano czasu lokalnego, bo w tych godzinach powinni spać.
W jakich przedziałach czasowych Mark i Hans mogą porozmawiać, przez Internet? Podaj odpowiednie przedziały czasu lokalnego w obu miastach. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2
Jacek patrzy na wieżowiec z okna budynku znajdującego się po drugiej stronie ulicy. Podstawę wieżowca widzi pod kątem depresji 30^0, a dach pod kątem wzniesienia 45^0 do poziomu. Budynek obserwuje z wysokości 9 m nad poziomem ulicy. Oblicz wysokość wieżowca.

Zadanie 3
Cenę sukienki obniżono na wyprzedaży o 20%. Zmniejsza to zysk sprzedawczyni do 4% w stosunku do ceny, jaką za nią zapłaciła. Oblicz ilu procentowy zysk miała ona ze sprzedaży tej sukienki przy jej normalnej cenie?

Zadanie 4
Jeden z boków trójkąta ma długość 6 cm. Suma długości dwóch pozostałych boków równa się 15 cm. Znajdź wszystkie pary liczb naturalnych, które mogą być długościami pozostałych dwóch boków tego trójkąta. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 5
Przedstaw liczbę 10983 jako sumę dwóch liczb naturalnych takich, że pierwsza z nich jest podzielna przez 5, a druga powstaje z niej przez skreślenie ostatniej cyfry. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 6
W prostokąt o długościach boków 10 cm i 11 cm wpisano inny prostokąt, którego dłuższy bok do krótszego jest w stosunku 2 : 1 i którego każdy wierzchołek leży na innym boku danego prostokąta. Oblicz pole prostokąta wpisanego.

Etap II
Czas pracy: 120 minut

Zadanie 1

Ekspedientka przygotowała mieszankę cukierków o następującym składzie: 30% cukierków – Toffi, 40% – Michałki, 8 kilogramów – Raczki, reszta – Krówki. Cena mieszanki wyniosła 17 zł za 1 kilogram. Ile kilogramów każdego rodzaju cukierków znajduje się w tej mieszance?

Cennik (cena za 1 kg)
Krówki – 16 zł
Marmoladki Pektynowe – 15 zł
Michałki – 22 zł
Raczki – 12 zł

Zadanie 2

Różnica kwadratów dwóch liczb naturalnych wynosi 2007. Znajdź wszystkie liczby spełniające ten warunek.

Zadanie 3

Uzasadnij, że dla każdej liczby naturalnej n wyrażenie postaci:

$$(n^3 - n)\cdot(n^2 - 4)$$

jest wielokrotnością liczby 60.

Zadanie 4

Okrąg wpisany w trójkąt równoramienny ma promień równy 2, a okrąg styczny do dwóch ramion tego trójkąta i do okręgu wpisanego w ten trójkąt ma promień równy 1. Oblicz pole tego trójkąta.

Zadanie 5

W trójkącie ABC, którego miary kątów są w stosunku 1 : 5 : 6 poprowadzono z wierzchołka największego kąta środkową CD i wysokość CE. Oblicz kąty trójkąta CDE.

Zadanie 6

Zegar na wieży kościelnej w Bajkowicach spóźnia się 4 minuty na godzinę. Kościelny nastawił go na właściwą godzinę 4 godziny temu. Za 12 minut trębacz z Wieży Mariackiej zagra Hejnał Mariacki wyznaczający punktualnie godzinę 12.00. O której godzinie zegar w Bajkowicach wybije godzinę 12.00?

Etap III
Czas pracy: 120 minut

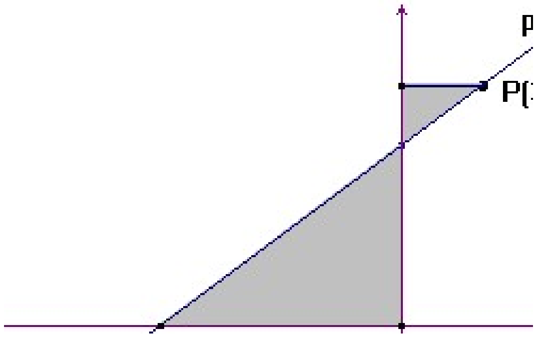
Zadanie 1

Na skwerze zakwitły 3 krzewy w kolorach: białym, żółtym i czerwonym. Liczba wszystkich kwiatów była dwa razy większa od liczby kwiatów białych. Po kilku dniach opadło 6 kwiatów i wtedy suma wszystkich kwiatów na krzewach była dwa razy większa od liczby kwiatów żółtych. Po kolejnych dniach opadło 8 kwiatów i wtedy w sumie na krzewach było dwa razy więcej wszystkich kwiatów niż kwiatów czerwonych, a liczby kwiatów poszczególnych kolorów wyrażały się kolejnymi liczbami naturalnymi. Ile kwiatów poszczególnych kolorów było na krzewach w pierwszym dniu?

Zadanie 2

W trójkącie równoramiennym ramię jest dwa razy dłuższe od podstawy. Suma długości promieni okręgów wpisanego i opisanego na tym trójkącie jest równa 11. Oblicz obwód tego trójkąta.

Zadanie 3
Przez punkt P(3,9) przechodzi prosta *p* tak, że mniejszy trójkąt prostokątny (na rysunku obok), ma pole dziewięć razy mniejsze od większego trójkąta. Jakie jest równanie prostej *p*?



Zadanie 4
W trapezie równoramiennym przekątne o długości 12 cm przecinają się w punkcie *S* pod kątem 30^0. Punkty *K*, *L*, *M*, *N* są środkami boków trapezu. Oblicz pole czworokąta *KLMN*.

Zadanie 5
Narysuj wykres funkcji $y = |x + 2| + |x - 2|$.

Zadanie 6
Znajdź wszystkie liczby pierwsze *p* i *q* takie, że $p^2 - 6q^2 = 1$.