

XII Wrocławski Konkurs Matematyczny dla uczniów klas I-III gimnazjów

rok szkolny 2016/2017

Etap III

Zadanie 1

AD , BE i CF to wysokości trójkąta ABC i jednocześnie odcinki dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta DEF . Znając kąty trójkąta ABC : 45° , 60° i 75° , Oblicz kąty trójkąta DEF .

Zadanie 2

Na brzegu jeziora w kształcie koła znajdują się kolejno przystanie K , L , P , Q . Z przystani K wypływa kajak kierując się do przystani Q , a z przystani L wypływa łódka kierując się do przystani P . Wiadomo, że gdyby zachowując swe prędkości kajak popłynął w kierunku P , a łódka w kierunku Q , to doszłoby do zderzenia. Wykaż, że kajak i łódka dobiją do celu w tym samym czasie.

Zadanie 3

Udowodnij, że równanie

$$x^2 = 4yz + 1$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w różnych liczbach naturalnych x , y , z .

Zadanie 4

Na zawodach motocyklowych motocyklista, który zajął drugie miejsce jechał z prędkością o 15 km/h mniejszą od zwycięzcy i o 3 km/h większą od prędkości tego, który zajął trzecie miejsce. Wszyscy zawodnicy wystartowali jednocześnie i każdy jechał ze swoją stałą prędkością. Drugi zawodnik minął linię mety 12 minut po pierwszym i trzy minuty przed trzecim. Oblicz z jaką prędkością jechał każdy z zawodników.

Zadanie 5

Wykaż, że liczba cyfr liczby 5^{50} nie przekracza 35.

Zadanie 6

W trapezie $ABCD$ (rysunek niżej), podstawy mają długości: $|AB|=a$ i $|CD|=b$, gdzie $a > b > 0$. Suma miar kątów przy podstawie jest równa 90° . Środek M podstawy AB połączono ze środkiem N podstawy CD .

Wykaż, że $|MN| = \frac{a-b}{2}$.